ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

① Έστω $c: I \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παράμετρο το s και $k(s) \neq 0$ $\forall s \in I$. Ορίζουμε:

$$\bar{c} = c(s) + \frac{1}{k(s)} \vec{n}(s)$$

i) Είναι η $\bar{c}$ κανονική;

ii) Αν είναι κανονική, ποιο τότε το πλαίσιο Frenet και η καμπυλότητά της

ΛΥΣΗ

$$\frac{d\bar{c}}{ds} = \dot{c} - \frac{\dot{k}}{k^2}\vec{n} + \frac{1}{k}\dot{\vec{n}} = \vec{t} - \frac{\dot{k}}{k^2}\vec{n} + \frac{1}{k}(-k\cdot\vec{t}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{c}}{ds} = -\frac{\dot{k}}{k^2}\vec{n}$$

. Η $\bar{c}$ μη κανονική στα κρίσιμα σημεία της k

ii) Έστω $\bar{c}$ κανονική $\to$ $\dot{k}(s) \neq 0$, $\forall s \in I$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left\| \frac{d\bar{c}}{ds} \right\| = \frac{|\dot{k}|}{k^2} \Rightarrow$ s όχι μήκος τόξου της $\bar{c}$

το μήκος τόξου $\bar{s}$ της $\bar{c}$ είναι

$$\bar{s} = \int_{s_0}^{s} \left\| \frac{d\bar{c}}{ds} \right\| d\sigma = \int_{s_0}^{s} \frac{|\dot{k}(\sigma)|}{k^2(\sigma)} d\sigma$$

το μήκος τόξου της $\bar{c}$

Για το πλαίσιο Frenet καμπύλης του $\mathbb{R}^2$ με τυχαία παράμετρο είναι: $\{\bar{\vec{t}}, \bar{\vec{n}}\}$ της $\bar{c}$:

$$\bar{\vec{t}} = \frac{d\bar{c}/ds}{\|d\bar{c}/ds\|} = \frac{k^2}{|\dot{k}|}\left(\frac{-\dot{k}}{k^2}\right)\vec{n} = -\frac{\dot{k}}{|\dot{k}|}\vec{n} = \varepsilon \cdot \vec{n}$$

όπου,

$$\varepsilon = \begin{cases} -1, & \dot{k} > 0 \\ 1, & \dot{k} < 0 \end{cases}$$

$$\bar{\vec{n}} = J\bar{\vec{t}} = J(\varepsilon\vec{n}) \underset{\text{απεικ.}}{\overset{\text{γραμ.}}{=}} \varepsilon \cdot J(\vec{n}) = -\varepsilon \cdot \vec{t}$$

$$\frac{d\bar{\vec{t}}}{d\bar{s}} = \bar{k}\bar{\vec{n}} \Leftrightarrow \frac{ds}{d\bar{s}} \frac{d\bar{\vec{t}}}{ds} = \bar{k}\bar{\vec{n}} \Leftrightarrow \frac{k^2}{|\dot{k}|} \cdot \frac{d}{ds}(\varepsilon\vec{n}) = \bar{k}(-\varepsilon\vec{t})$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{|\dot{k}|}\cdot \mathring{n} = -\bar{k}\cdot \bar{t} \Leftrightarrow \frac{k^2}{|k|}(-k\vec{t}) = -\bar{k}\vec{t} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{k} = \frac{k^3}{|\mathring{k}|}.$$

(2) Έστω $f: R\to R$ λεία συνάρτηση. Θεωρούμε επιφάνεια $S: z = x + f\left(\frac{y}{x}\right),\ x\neq 0$. Αποδείξτε ότι όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα της S περνούν από το σημείο $(0,0,0)$

ΛΥΣΗ

Θεωρώ τη συνάρτηση $F: U\subset R^3 \to R$ τύπου $f(x,y,z) = x f\left(\frac{y}{x}\right) - z$ όπου $U = \{(x,y,z): x\neq 0\}$ όπου $S = F^{-1}(0)$ δίχως κρίσιμα σημεία. Άρα είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια με προσανατολισμό $\vec{N} = \frac{\text{grad} F}{\|\text{grad} F\|}$

όπου $\text{grad} F = \left(f\left(\frac{y}{x}\right) + x f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right),\ x\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right),\ -1\right)$

$$\Rightarrow \text{grad} F = \left(f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right),\ f'\left(\frac{y}{x}\right),\ -1\right)$$

Έτσι, η εξ. του εφαπτ. επιπέδου T_pS στο τυχόν $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ είναι:

$$<(x,y,z) - (x_0,y_0,z_0), \vec{N}> = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-x_0)\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - \frac{y_0}{x_0} f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right) + (y-x_0) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + (z-z_0)(-1) = 0$$

$$\xRightarrow{(0,0,0)} (0-x_0)(\qquad) + (0-x_0) f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + (0-z_0)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow -x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + z_0 = 0 \Rightarrow -x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) - x_0 f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = 0 \Rightarrow \underset{\text{ισχύει}}{0=0}$$

③ Εστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη παραμέτρου μήκος τόξου s καμπυλότητα $k(s)>0$, $\forall s \in I$. Αν ισχύει:
$[\ddot{c}(s), \dddot{c}(s), \ddddot{c}(s)] = 0$, $\forall s \in I$
τότε νδο η c καμπύλη είναι σταθερής κλίσης

ΛΥΣΗ

$\dot{c} = \vec{t} \Rightarrow \ddot{c} = \dot{\vec{t}} \Rightarrow \ddot{c} = k\vec{n}$

$\dddot{c} = \dot{k}\vec{n} + k\dot{\vec{n}} = \dot{k}\vec{n} + k(-k\vec{t} + \tau\vec{b}) = -k^2\vec{t} + \dot{k}\vec{n} + k\tau\vec{b}$

$\ddddot{c} = -2k\dot{k}\vec{t} + (-k^2)\dot{\vec{t}} + \ddot{k}\vec{n} + \dot{k}\cdot\dot{\vec{n}} + (k\tau)^{\circ}\vec{b} + k\tau\,\dot{\vec{b}} =$
$= -2k\dot{k}\vec{t} - k^3\vec{n} + \ddot{k}\vec{n} + \dot{k}(-k\vec{t} + \tau\vec{b}) + (k\tau)^{\circ}\vec{b} + k\tau(-\tau\cdot\vec{n}) =$
$= -3k\dot{k}\vec{t} + (\ddot{k} - k^3 - k\tau^2)\vec{n} + (\dot{k}\tau + (k\tau)^{\circ})\vec{b} =$
$= -3k\dot{k}\vec{t} + (\ddot{k} - k^3 - k\tau^2)\vec{n} + (2\dot{k}\tau + k\dot{\tau})\vec{b}$.

Επειδή $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση τότε είναι
$$[\ddot{c}, \dddot{c}, \ddddot{c}] = \begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k^2 & \dot{k} & k\tau \\ -3k\dot{k} & \ddot{k}-k^3-k\tau^2 & 2\dot{k}\tau+k\dot{\tau} \end{vmatrix} =$$

$$= -k \begin{vmatrix} -k^2 & k\tau \\ -3k\dot{k} & 2\dot{k}\tau+k\dot{\tau} \end{vmatrix} = -k^3 \begin{vmatrix} 1 & \tau \\ -3\dot{k} & 2\dot{k}\tau+k\dot{\tau} \end{vmatrix} =$$

$$= k^3(k\dot{\tau} - \dot{k}\tau) = k^5\left(\frac{\tau}{k}\right)^{\circ} = 0 \overset{k>0}{\Rightarrow} \left(\frac{\tau}{k}\right)^{\circ} = 0 \Rightarrow \frac{\tau}{k} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

④ Κανονική παραμετρική επιφάνεια $X(u,v)$ έχει μοναδιαίο κάθετο $N(u,v) = (\cos(u+v), \sin(u+v), 0)$
Να βρεθεί η καμπυλότητα Gauss.

ΛΥΣΗ

$L X_u = -N_u$, $L X_v = -N_v$ $\rightarrow$

$\begin{cases} L X_u = -(-\sin(u+v), \cos(u+v), 0) \\ L X_v = -(-\sin(u+v), \cos(u+v), 0) \end{cases} \Rightarrow L X_u = L X_v \Leftrightarrow L(X_u - X_v) = 0$
$\Leftrightarrow L(X_u - X_v) = 0\,(X_u - X_v)$

άρα μία κύρια καμπυλότητα είναι 0 $\Rightarrow$ $K = 0$

Παρατήρηση: Η εικόνα της απεικόνισης Gauss είναι ο μέγιστος κύκλος της σφαίρας S^2

(5) Έστω $c: I \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ καμπύλη της S^2 (σφαιρική)

Θεωρούμε την παραμετρική επιφάνεια:

$X(s,v) = (0,0,1) + v\,c(s)$, $(s,v) \in I \times (0,\infty)$

i) Εξετάστε αν η X είναι κανονική

ii) Υπολογίστε καμπυλότητα Gauss και μέση καμπυλότητα

iii) Εξετάστε πότε η X είναι ελαχιστική επιφάνεια

ΛΥΣΗ

i) $X_s = v\dot{c} = v\,\vec{t}(s)$

$X_v = c = c(s)$

$X_s \times X_v = v\,\vec{t}(s) \times c(s) \Rightarrow \|X_s \times X_v\| = v\,\|\vec{t} \times c\| =$

$= v\,\overbrace{\cancel{\|\vec{t}\|\,\|c\|\sin(\widehat{\vec{t}, c})}}^{1} = v > 0 \Rightarrow X$ κανονική

ii) $E = \|X_v\|^2 = v^2 \cdot \cancel{\|\vec{t}(s)\|^2} = v^2$ $\qquad N = \dfrac{X_s \times X_v}{\|X_s \times X_v\|} = \dfrac{\vec{t} \times c}{\|\vec{t} \times c\|} = \vec{t} \times c$

$F = \langle X_v, X_s \rangle = v\,\cancel{\vec{t}(s)\,c(s)} = 0$

$G = \|X_s\|^2 = \|c\|^2 = 1$

$e = \langle X_{ss}, N \rangle = \langle v\,\dot{\vec{t}}(s), \vec{t}(s) \times c(s) \rangle \overset{k>0}{\underset{\text{σφαιρ.}}{=}}$

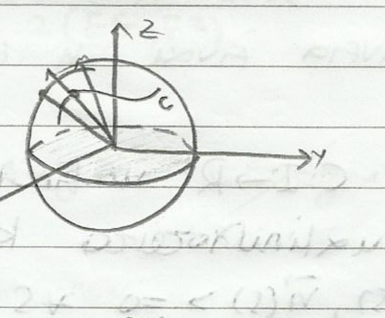
$= \langle v k \vec{n}, \vec{t}(s) \times c(s) \rangle = vk\langle \vec{t} \times c, \vec{n} \rangle = vk[\vec{t}, c, \vec{n}] =$

$f = \langle X_{sv}, N \rangle = \langle t, \vec{t} \times c \rangle = 0$ $\qquad = -vk\,[\vec{t}, \vec{n}, c] =$

$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \langle 0, \vec{t} \times c \rangle = 0$ $\qquad = -vk \cdot \langle \vec{b}, c \rangle$

$K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} \Rightarrow K = 0$, $\quad H = \dfrac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \dfrac{-vk\langle \vec{b}, c \rangle}{2v^2}$

$\Rightarrow H = -\dfrac{k\langle \vec{b}, c \rangle}{2v}$



Κωνική επιφάνεια, αναπτυκτή και ευθειογενής

iii) Αναζητούμε αν $H = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{b}, c \rangle = 0$

Αυτό μπορεί να συμβεί αν έχουμε c μέγιστο κύκλο. Επίσης, αναζητώ τις καμπύλες της S^2 που πληρούν $\langle \vec{b}(s), c(s) \rangle = 0$, $\forall s \in I$

$$c(s) = \underbrace{< c(s), \vec{t}(s) >}_{\varphi(s)} \vec{t}(s) + \underbrace{< c(s), \vec{n}(s) >}_{\psi(s)} \vec{n}(s) + \cancel{< c(s), \vec{b}(s) > \vec{b}(s)}^{\,0}$$

$\boxed{c = \varphi \vec{t} + \psi \vec{n}}$ φ, ψ λύσεις ως γινόμενο λύσω

$$\mathring{c} = \mathring{\varphi} \vec{t} + \varphi \mathring{\vec{t}} + \mathring{\psi} \vec{n} + \psi \mathring{\vec{n}} \xrightarrow{\text{frenet}}$$

$$\vec{t} = \mathring{c} = \mathring{\varphi} \vec{t} + \varphi k \vec{n} + \mathring{\psi} \vec{n} + \psi (-k\vec{t} + \tau \vec{b}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathring{\varphi} - \psi k = 1 \\ \varphi k + \mathring{\psi} = 0 \\ \psi \tau = 0 \end{cases}$$

Έστω λοιπόν $\tau(s_0) \neq 0 \Rightarrow \tau(s), \forall s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) = I_0 \subset I$

Τότε $\psi(s) = 0$, $s \in I_0$

Έτσι $\varphi k + \cancel{\mathring{\psi}(s)}^{\,0} = 0 \Rightarrow \varphi k = 0 \xrightarrow{k>0} \varphi = 0$

Έτσι $0 - \psi k = 1 \Rightarrow 0 = 1$ Άτοπο

Άρα η καμπύλη είναι επίπεδη διότι $\tau(s) = 0, \forall s \in I$

$\Rightarrow c(s)$ κύκλος όπως $< c(s), \vec{b}(s) > = 0 \Rightarrow c$ μεγ. κύκλος

Δηλαδή η X θα είναι τμήμα επιπέδου

~~Δημιουργήστε~~: Οι μόνες ελαχιστικές επιφάνειες είναι τα επίπεδα.

Σχόλιο: Άλλη μια ελαχιστική και ευθειογενής επιφάνεια είναι η ελικοειδής.

⑥ Έστω $c: I \to R^3$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητα $k(s) > 0$, $\forall s \in I$. Αν ισχύει $< c(s), \vec{n}(s) > = 0$ $\forall s$, τότε νδο $\frac{\tau}{k}$ είναι γραμμική συνάρτηση.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$c(s) = < c(s), \vec{t}(s) > \vec{t}(s) + \cancel{< c(s), \vec{n}(s) >}^{\,0} \vec{n}(s) + < c(s), \vec{b}(s) > \vec{b}(s)$$

όπου $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ ορθοκανονική βάση.

$c(s) = f(s)\vec{t}(s) + g(s)\vec{b}(s) \Leftrightarrow c = f\cdot\vec{t} + g\cdot\vec{b} \overset{f,g}{\Rightarrow}$

$\Leftrightarrow \dot{c} = \dot{f}\vec{t} + f\dot{\vec{t}} + \dot{g}\vec{b} + g\dot{\vec{b}} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \vec{t} = \dot{f}\vec{t} + fk\vec{n} + \dot{g}\vec{b} - g\tau\vec{n} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dot{f} \Rightarrow f = s + σταθ(2) \\ 0 = fk - g\tau \Leftrightarrow fk = g\tau \Leftrightarrow \dfrac{\tau}{k} = \dfrac{f}{g} = \dfrac{1}{σταθ(1)}\cdot(s + σταθ(2)) \\ 0 = \dot{g} \Rightarrow g = σταθ(1) \neq 0 \end{cases}$$

(διότι αν $g=0 \leadsto 0 = fk \Rightarrow f = 0$ άτοπο)

Άρα,

$$\frac{\tau}{k} = \underbrace{\frac{1}{σταθ(1)}}_{\alpha}\cdot s + \underbrace{\frac{σταθ(2)}{σταθ(1)}}_{\beta} \Rightarrow \boxed{\frac{\tau}{k} = \alpha\cdot s + \beta}$$

άρα γραμμική συνάρτηση

(7) Έστω S κανονική επιφάνεια χωρίς ομφαλικά και ισοπεδασιμεία. Αν $x: U\subset\mathbb{R}^2 \to S\subset\mathbb{R}^3$ σύστ./συντεταγμ. και οι κύριες καμπυλότητες είναι $k_1 = \frac{e}{E}$, $k_2 = \frac{g}{G}$. Τότε νδο το x σύστ. γραμμών καμπυλότητας

ΛΥΣΗ (δηλ. οι παραμετρ. καμπύλες είναι γραμ. καμπύλες)

Αρκεί νδο $F = f = 0$

$$K = k_1k_2 = \frac{eg}{EG}, \quad H = \frac{k_1+k_2}{2} = \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right)\frac{1}{2}$$

Αλλά,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \text{ γνωστό και } H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

Εξισώνουμε:

$$\frac{eg}{EG} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \Rightarrow \cancel{egEG} - egF^2 = \cancel{EGeg} - EGf^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow egF^2 = EGf^2 \quad (1)$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\left(\frac{eG + Eg}{EG}\right) = \cancel{\tfrac{1}{2}}\left(\frac{eG - 2fF + Eg}{(EG - F^2)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (EG - F^2)(eG + Eg) = EG(eG - 2fF + gE) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{EG^2e} + \cancel{E^2Gg} - F^2Ge - F^2Eg = \cancel{EG^2e} - 2EFGf + \cancel{E^2Gg} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow F^2Ge + F^2Eg = 2EFGf \Leftrightarrow F(FGe + FEg - 2EGf) = 0$ ②

Έστω $\exists (u_0, v_0) \in U$ τ/ω: $F(u_0, v_0) \neq 0$

τότε αναγκαστικά για το (u_0, v_0) ισχύει από τη ②:

$FGe + FEg - 2EGf = 0 \Leftrightarrow FGe + FEg = 2EGf \Rightarrow$

$$\Rightarrow f = \frac{FGe + FEg}{2EG}$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην ①

$$eg\,F^2 = \frac{\cancel{EG}(FGe + FEg)^2}{4E^{\cancel{2}}G^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow 4EGf^2eg = (FGe + FEg)^2$$

$\Leftrightarrow 4EGF^2eg = F^2G^2e^2 + 2F^2EGeg + F^2E^2g^2 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow (FGe - FEg)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{F}Ge = \cancel{F}Eg \Leftrightarrow Ge = Eg \Rightarrow \frac{e}{E} = \frac{g}{G} \Rightarrow k_1 = k_2$

$F \neq 0$

Άρα το σημείο ισοπεδο ή ομφαλικό (ζ) άτοπο

Άρα, $F = 0$ στο U

Έτσι ① $EGf^2 = 0 \Rightarrow f = 0$ στο U

Άρα, το X σύστ. γραμμών καμπυλότητας

⑧ Έστω S: κανονική επιφάνεια με $N: S \to S^2$ Gauss απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι $\exists x: U \to S$ σύστ. συντ/ων τ/ω $N_u = aX_u$ και $N_v = bX_v$ όπου και $a, b \in \mathbb{R}^*$

Νδο το $X(U)$ είναι τμήμα σφαίρας.

Λύση

Πρέπει νδο $k_1 = k_2 \Leftrightarrow k = H^2 \Leftrightarrow$ όλα τα σημεία είναι ομφαλικά

$\left\{\begin{array}{l} N_u = aX_u \Rightarrow -LX_u = aX_u \Rightarrow LX_u = -aX_u \\ N_v = bX_v \Rightarrow -LX_v = bX_v \Rightarrow LX_v = -bX_v \end{array}\right| \Rightarrow$ κύριες καμπυλότητες είναι το $-a, -b$.

Θα δείξουμε ότι $a = b$

Έστω ότι $a \neq b$.

$N_{uv} = N_{vu}$ (Θεώρημα Schwartz) $\Rightarrow aX_{uv} = bX_{uv} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)x_{uv}=0 \overset{a\neq b}{\Rightarrow} x_{uv}=0 \Rightarrow x_u$ εξαρτάται μόνο από το u. ⊛

αν βάλαμε ανάποδα τις παραγώγους τότε θα προκύψει ότι

x_v εξαρτάται μόνο από το v. ⊛⊛

Έτσι, $E=\|x_u\|^2=\varphi(u)>0$ (από ⊛)

$G=\|x_v\|^2=\psi(v)>0$ (από ⊛⊛)

$F=0$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u) & 0 \\ 0 & \psi(v) \end{pmatrix}$$

Έστω νέοι παράμετροι $\tilde{u}=\int\sqrt{\varphi(u)}\,du$, $\tilde{v}=\int\sqrt{\psi(v)}\,dv$

που θα πρέπει $\dfrac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi(u)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\psi(v)} \end{vmatrix} = \sqrt{\varphi(u)\psi(v)}>0$

Εισάγω το σύστ. συντ/νων

$\bar{x}(\tilde{u},\tilde{v}) = x(u(\tilde{u}), v(\tilde{v}))$

$\bar{x}_{\tilde{u}} = \dfrac{du}{d\tilde{u}} x_u = \dfrac{x_u}{\sqrt{\varphi(u)}}$, $\bar{x}_{\tilde{v}} = \dfrac{dv}{d\tilde{v}} x_v = \dfrac{x_v}{\sqrt{\psi(v)}}$

$\tilde{E} = \|\tilde{x}_{\tilde{u}}\|^2 = \dfrac{\|x_u\|^2}{\varphi(u)} = \dfrac{E}{E} = 1$, $\tilde{F} = \langle \tilde{x}_{\tilde{u}}, \tilde{x}_{\tilde{v}} \rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\varphi(u)\psi(v)}} \langle x_u, x_v \rangle = 0$

$\tilde{G} = \|\tilde{x}_{\tilde{v}}\|^2 = \dfrac{\|x_v\|^2}{\psi(v)} = \dfrac{G}{G} = 1$

Τότε $\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Η επιφάνεια που τοπ ισομετρ. με το επίπεδο

$\xrightarrow[\text{Θεώρημα}]{\text{Έξοχο}}$ $k=0$ άτοπο (διότι $k=(-a)(-b)\neq 0$) για $a=b$